TITLE:

円柱の周りの粘性流 (流体力学における数値計算シンポジウム報告)

AUTHOR(S):

宮城, 敏夫

CITATION:
宮城, 敏夫. 円柱の周りの粘性流 (流体力学における数値計算シンポジウム報告). 数理解析研究所講究録 1965, 7: 11-14

ISSUE DATE:
1965-12

URL:
http://hdl.handle.net/2433/107376

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
7巻 1965年 11-14

円柱の周りの粘性流

大阪府大　工　航空　　宮　城　敏　夫

低レイノルズ数の場合の円柱の周りの流れに対して，特に円柱背後に生ずる vortex pair に注目して計算を行つた。基礎式としては Oseen の運動方程式と連続の式とを採用する。即ち，流れ函数 ψ を用いて

$$\triangle(\triangle-2k\,\partial/\partial x)\,\psi=0\ ,\qquad k=U/2\nu\ , \tag{1}$$

境界条件は

$$\begin{aligned} &u\to U, \quad v\to 0\ ; \quad r\to\infty\ ,\\ &u=v=0\ ; \quad r=a\ , \end{aligned} \tag{2}$$

である。この解は一般に次の如く与えられる：

$$\begin{aligned}\psi=&Ur\sin\theta+A_0\log r/a+B_0\,\theta+\sum_{n=1}^{\infty}(a/r)^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)\\ &+b_0\int_0^{\theta}kr\,[K_1(kr)+K_0(kr)\cos\theta\,]\,e^{kr\cos\theta}d\theta\\ &+e^{kr\cos\theta}\sum_{n=0}^{\infty}K_n(kr)\,(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)\ 。\end{aligned} \tag{3}$$

いま，複素速度を求めれば

$$\begin{aligned}u-iv&=e^{-i\theta}\left(\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+i\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi\\ &=U+\sum_{n=0}^{\infty}C_n\left(\frac{a}{r}e^{-i\theta}\right)^{n+1}+e^{kr\cos\theta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nK_n(kr)\,e^{in\theta}\ ,\end{aligned} \tag{4}$$

となる。ただし，

$$C_{-n}=\overline{C}_{n-1}$$

$$C_0=(B_0+iA_0)/a\ ,\quad C_n=n\,(B_n-iA_n)/a\ ,\quad n=1,2,3,\cdots\cdots, \tag{5}$$

$$c_0 = k\left\{ b_0 - \frac{b_1}{2} + i\left(a_0 - \frac{a_1}{2}\right)\right\},$$

$$c_n = \frac{k}{2}\left\{ b_n - b_{n+1} + i\left(a_n - a_{n-1}\right)\right\},\quad n=1,2,3,\cdots\cdots,$$

である。ここで，円柱の場合には問題の対称性などにより $A_n = a_n = 0$ となり，C_n，c_n の系列はすべて実数となる。（4）に境界条件を適用すれば，C_n，c_n を決定する式は

$$\left.\begin{aligned} & C_{s-1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n I_{n+s}(ka)\, K_n(ka) = 0, \qquad s=1,2,3,\cdots \\ & \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n I_{n-s}(ka)\, K_n(ka) = \begin{cases} -U, & s=0 \\ 0, & s=1,2,3,\cdots \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

となる。これらの式で決められた C_n，c_n を用いて B_n，b_n の系列は次のように決めることが出来る。

$$\left.\begin{aligned} & B_0 = aC_0, \qquad B_n = \frac{a}{n} C_n, \qquad n=1,2,3,\cdots \\ & b_0 = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{\infty} c_j, \qquad b_n = \frac{2}{k}\sum_{j=n}^{\infty} c_j, \qquad n=1,2,3,\cdots \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

故に，（6）の計算を行えば場の量はすべて適当な桁数迄求めることが出来る。

一方，レイノルズ数が小さいということを利用して，レイノルズ数で展開する方法がある。一例をあげると

$$\left.\begin{aligned} \psi/Ua = {} & \left(r_1 - \frac{1}{r_1}\right)\sin\theta \\ & + \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_m\left\{\Phi_{m,n}(R_1) - \Phi_{m,n}(R_1 r_1)\right\}\frac{\sin n\theta}{n r_1^{\,n}}, \\ \text{ただし}\quad \Phi_{m,n} = {} & (K_{m-1} + K_{m+1})(I_{m-n} + I_{m+n}) \\ & + K_m(I_{m-n-1} + I_{m-n+1} + I_{m+n-1} + I_{m+n+1}), \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

$$r_1 = r/a, \qquad R_1 = ka = R/4$$

で，R はレイノルズ数である。

K_m，I_m などのベッセル函数も R が小さいものとして展開すれば，未知定数 B_m を決定し得て，場の量を求めることが出来る。例えば，R_1^4 迄を考慮すれば

$$B_0/4=(1+2\Omega)^{-1}\left[1-2^{-4}(1+2\Omega)^{-1}(1-16\Omega-16\Omega^2)R_1^2\right.$$

$$+(1+2\Omega)^{-1}\left\{2^{-7}\cdot 3^{-2}(271+288\Omega+48\Omega^2)\right.$$

$$\left.\left.-2^{-8}\cdot 3^{-1}(1+2\Omega)^{-1}(1-16\Omega-16\Omega^2)(11+76\Omega+48\Omega^2)\right\}R_1^4+\cdots\cdots\right], \tag{9}$$

ただし，　$\Omega=\ln(8/R)-\gamma$，

などが得られるが，かなり厄介な式である。その上に，ここで注目している物体背後の vortex pair の大きさなどは，特に充分高次の R 展開の項を必要とする。（物体背後では，流体が殆んど静止しかけているので，場の量，例えばx軸上の速度などは，R の低次の項が互に打ち消して非常に小さい値になるからである。）

他方，(6) 式は連立一次方程式であるから，原理的には手廻しの計算機によつても，c_nを求めることは可能であるが，例えば，6元で有効数字8桁位を出そうとすれば，単調な仕事のために没頭できなかつたセイもあつたにせよ，マル二日を要した経験があるので，これはやめた方が宜しい。というのは，電子計算機を以てすれば，16元であつても，相当な桁数が非常に速く，しかも，計算機屋？さんにお願いするとしても，非常に安価で求めて頂けるものであるからである。尤も，この研究はかなり以前のものであつて，以上の事は既に旧聞に属するものであることは御容赦願いたい。

さて，この様にして，c_n についてその収斂性も確かめる意味に於て，c_5，c_6，c_7，c_8，c_9 までを取つた近似計算を行つて貰つた。その値を掲げるのは省略するが，かなり収斂のよいことが分つた。これを基礎として，場の量が計算される。すなわち，Oseenの運動方程式を基礎とした場合，レイノルズ数 4.0 の時に，円柱背後に生ずる vortex pairの大きさは次のようになる。

$R=4.0$	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9
角　度	20,072	20,691	20,658	20,659	20,659
円柱中心からの後方距離		1.2057a	1.2051a	1,2052a	1.2052a

さらに，vortex pair の出現し始める Critical Reynolds 数の見当をつけるために，

$$[\psi/(r_1-1)\sin\theta]_{r_1=1,\ \theta=0} \tag{10}$$

なる量を (8) を用いて計算してみた。(10)が 0 となる曲線は vortex pair を表わしている筈であるが，R^4 まででは見出すことが出来なかつた。しかし，大凡の見当はついたので，$R=3.2$ として再び (6) によつて c_9 までを求めて，vortex pairの大きさを調べた結果，角度は9.732°，円柱中心からの距離は 1.044a となり，非常に小さいものとなり，これより Critical Reynolds 数は 3.0附近と推量し得る。実験では5附近と報告されているのと比べて，興味深いと思われる。

参　考　文　献

S. Tomotika and T. Miyagi ; Memoirs Coll. Sci., Univ. of Kyoto, **30** (1962) 1.

S. Tomotika and T. Aoi ; Quart. J. Mech. & Appl. Math., **3** (1950) 140.

L. N. G. Filon ; Proc. Roy. Soc. A, **113** (1927) 7.

S. Taneda ; J. Phys. Soc. Japan, **11** (1956) 302.